

КНИЖКА-ШПАРГАЛКА

МАТЕМАТИКА

В
кармане

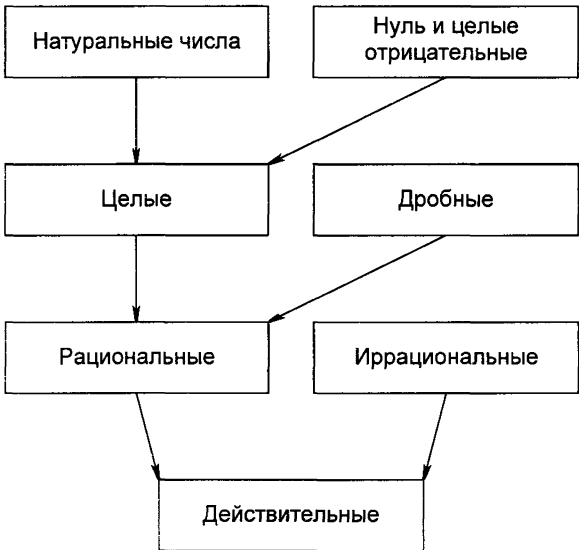
1,000	13,000	2,000	3,000	4,000	5,000
1,001	13,013	2,001	3,001	4,001	5,001
1,002	13,026	2,002	3,002	4,002	5,002
1,003	13,039	2,003	3,003	4,003	5,003
1,004	13,052	2,004	3,004	4,004	5,004
1,005	13,065	2,005	3,005	4,005	5,005
1,006	13,078	2,006	3,006	4,006	5,006
1,007	13,091	2,007	3,007	4,007	5,007
1,008	13,104	2,008	3,008	4,008	5,008
1,009	13,117	2,009	3,009	4,009	5,009
1,010	13,130	2,010	3,010	4,010	5,010
1,011	13,143	2,011	3,011	4,011	5,011
1,012	13,156	2,012	3,012	4,012	5,012
1,013	13,169	2,013	3,013	4,013	5,013
1,014	13,182	2,014	3,014	4,014	5,014
1,015	13,195	2,015	3,015	4,015	5,015
1,016	13,208	2,016	3,016	4,016	5,016
1,017	13,221	2,017	3,017	4,017	5,017
1,018	13,234	2,018	3,018	4,018	5,018
1,019	13,247	2,019	3,019	4,019	5,019
1,020	13,260	2,020	3,020	4,020	5,020
1,021	13,273	2,021	3,021	4,021	5,021
1,022	13,286	2,022	3,022	4,022	5,022
1,023	13,299	2,023	3,023	4,023	5,023
1,024	13,312	2,024	3,024	4,024	5,024
1,025	13,325	2,025	3,025	4,025	5,025
1,026	13,338	2,026	3,026	4,026	5,026
1,027	13,351	2,027	3,027	4,027	5,027
1,028	13,364	2,028	3,028	4,028	5,028
1,029	13,377	2,029	3,029	4,029	5,029
1,030	13,390	2,030	3,030	4,030	5,030
1,031	13,403	2,031	3,031	4,031	5,031
1,032	13,416	2,032	3,032	4,032	5,032
1,033	13,429	2,033	3,033	4,033	5,033
1,034	13,442	2,034	3,034	4,034	5,034
1,035	13,455	2,035	3,035	4,035	5,035
1,036	13,468	2,036	3,036	4,036	5,036
1,037	13,481	2,037	3,037	4,037	5,037
1,038	13,494	2,038	3,038	4,038	5,038
1,039	13,507	2,039	3,039	4,039	5,039
1,040	13,520	2,040	3,040	4,040	5,040
1,041	13,533	2,041	3,041	4,041	5,041
1,042	13,546	2,042	3,042	4,042	5,042
1,043	13,559	2,043	3,043	4,043	5,043
1,044	13,572	2,044	3,044	4,044	5,044
1,045	13,585	2,045	3,045	4,045	5,045
1,046	13,598	2,046	3,046	4,046	5,046
1,047	13,611	2,047	3,047	4,047	5,047
1,048	13,624	2,048	3,048	4,048	5,048
1,049	13,637	2,049	3,049	4,049	5,049
1,050	13,650	2,050	3,050	4,050	5,050
1,051	13,663	2,051	3,051	4,051	5,051
1,052	13,676	2,052	3,052	4,052	5,052
1,053	13,689	2,053	3,053	4,053	5,053
1,054	13,702	2,054	3,054	4,054	5,054
1,055	13,715	2,055	3,055	4,055	5,055
1,056	13,728	2,056	3,056	4,056	5,056
1,057	13,741	2,057	3,057	4,057	5,057
1,058	13,754	2,058	3,058	4,058	5,058
1,059	13,767	2,059	3,059	4,059	5,059
1,060	13,780	2,060	3,060	4,060	5,060
1,061	13,793	2,061	3,061	4,061	5,061
1,062	13,806	2,062	3,062	4,062	5,062
1,063	13,819	2,063	3,063	4,063	5,063
1,064	13,832	2,064	3,064	4,064	5,064
1,065	13,845	2,065	3,065	4,065	5,065
1,066	13,858	2,066	3,066	4,066	5,066
1,067	13,871	2,067	3,067	4,067	5,067
1,068	13,884	2,068	3,068	4,068	5,068
1,069	13,897	2,069	3,069	4,069	5,069
1,070	13,910	2,070	3,070	4,070	5,070
1,071	13,923	2,071	3,071	4,071	5,071
1,072	13,936	2,072	3,072	4,072	5,072
1,073	13,949	2,073	3,073	4,073	5,073
1,074	13,962	2,074	3,074	4,074	5,074
1,075	13,975	2,075	3,075	4,075	5,075
1,076	13,988	2,076	3,076	4,076	5,076
1,077	13,101	2,077	3,077	4,077	5,077
1,078	13,114	2,078	3,078	4,078	5,078
1,079	13,127	2,079	3,079	4,079	5,079
1,080	13,140	2,080	3,080	4,080	5,080
1,081	13,153	2,081	3,081	4,081	5,081
1,082	13,166	2,082	3,082	4,082	5,082
1,083	13,179	2,083	3,083	4,083	5,083
1,084	13,192	2,084	3,084	4,084	5,084
1,085	13,205	2,085	3,085	4,085	5,085
1,086	13,218	2,086	3,086	4,086	5,086
1,087	13,231	2,087	3,087	4,087	5,087
1,088	13,244	2,088	3,088	4,088	5,088
1,089	13,257	2,089	3,089	4,089	5,089
1,090	13,270	2,090	3,090	4,090	5,090
1,091	13,283	2,091	3,091	4,091	5,091
1,092	13,296	2,092	3,092	4,092	5,092
1,093	13,309	2,093	3,093	4,093	5,093
1,094	13,322	2,094	3,094	4,094	5,094
1,095	13,335	2,095	3,095	4,095	5,095
1,096	13,348	2,096	3,096	4,096	5,096
1,097	13,361	2,097	3,097	4,097	5,097
1,098	13,374	2,098	3,098	4,098	5,098
1,099	13,387	2,099	3,099	4,099	5,099
1,100	13,400	2,100	3,100	4,100	5,100



АЛГЕБРА

Числа

Развитие понятия числа от натурального до действительного



Натуральные числа

Признаки делимости

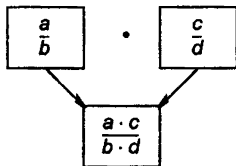
Делимость на:	Признак
2	Число оканчивается четной цифрой, т. е. 0, 2, 4, 6, 8
3	Сумма цифр записи числа делится на 3
4	Две последние цифры образуют число, делящееся на 4
5	Оканчивается на 0 или на 5
6	Делится одновременно и на 2, и на 3
8	Три последние цифры образуют число, делящееся на 8
9	Сумма цифр записи числа делится на 3
10	Оканчивается на 0

Рациональные числа

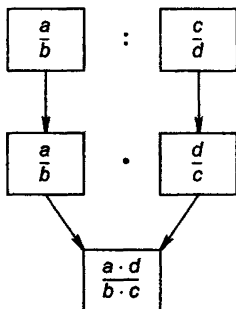
Сложение (вычитание) дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$

№	Отношение знаменателей	Сложение	Сумма
1	$n = q$	$\frac{m}{n} + \frac{p}{n}$	$\frac{m+p}{n}$
2	n и q — взаимно простые числа	$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$	$\frac{mq+pn}{nq}$
3	n кратно q , т. е. $n = aq$	$\frac{m}{aq} + \frac{p}{q}$	$\frac{m+ap}{aq}$
4	$\text{НОД}(n;q) = d$, т. е. $n = a \cdot d$ и $q = b \cdot d$	$\frac{m}{ad} + \frac{p}{bd}$	$\frac{mb+ap}{abd}$

Умножение дробей



Деление дробей



Пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \begin{array}{l} a, d \text{ — крайние члены} \\ b, c \text{ — средние члены} \end{array}$$

Свойства пропорции:

1. $a \cdot d = b \cdot c$
2. $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$, т. е. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$;
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, т. е. $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Модуль

Определение

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

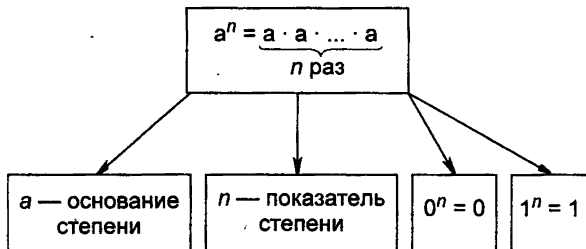
Свойства

- 1) $|a| = |-a|$
- 2) $|a| \geq a; |a| \geq -a$
- 3) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- 4) $|a - b| \geq ||a| - |b||$
- 5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 6) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

Формулы сокращенного умножения многочленов

1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
4	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Степень с натуральным показателем



Свойства степени с натуральным показателем

№	Свойство	Пример
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^5$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^5 : a^3 = a^2$
3	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^4)^3 = a^{12}$
4	$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$

Корень n -й степени
Арифметический корень n -й степени

Корень n -й степени из a равен b :
 $b^n = a$

Арифметический корень
 n -й степени

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \begin{array}{l} 1) b \geq 0 \\ 2) b^n = a \end{array}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Арифметический
квадратный корень

$$\sqrt{a} = b \quad \begin{array}{l} 1) b \geq 0 \\ 2) b^2 = a \end{array}$$

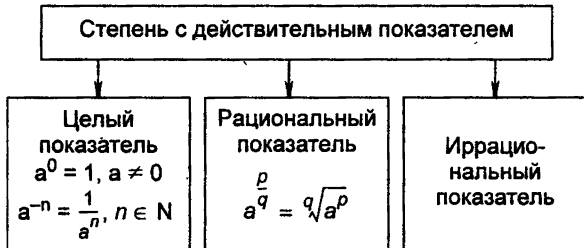
a —
подкоренное
выражение

n —
показатель
корня

Свойства арифметических корней

№	Свойство, $a \geq 0, b \geq 0$
1	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
3	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
4	$\sqrt[n]{k\sqrt{a}} = nk\sqrt{a}$
5	$n \cdot m\sqrt{a^{k \cdot m}} = n\sqrt{a^k}$

Степень с действительным показателем

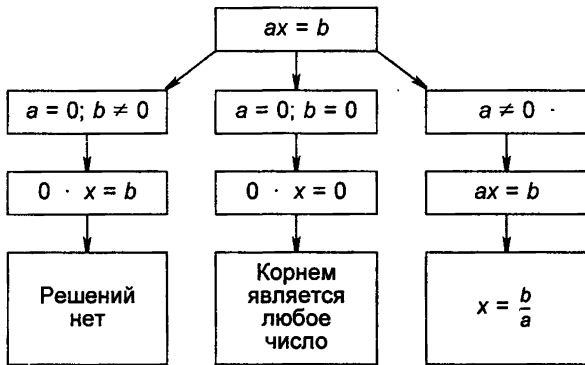


Уравнения с одной переменной

Степень	Название уравнения	Общий вид
1	Линейное	$ax = b$
2	Квадратное	$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
3	Кубическое	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

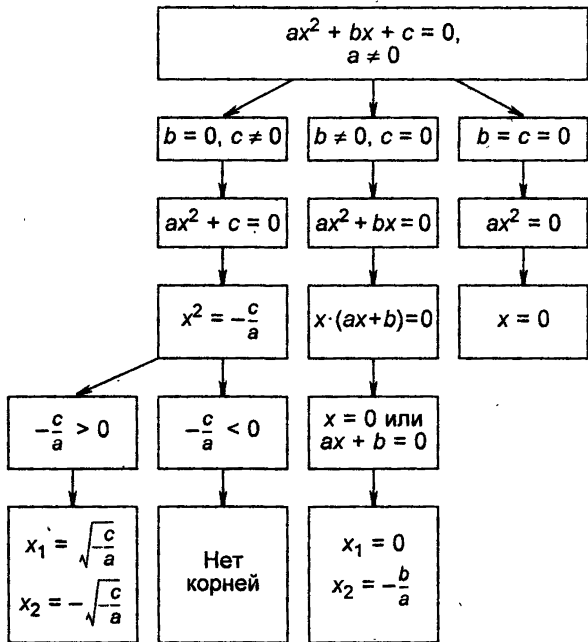
x — переменная; a, b, c, d — некоторые числа.

Решение линейного уравнения

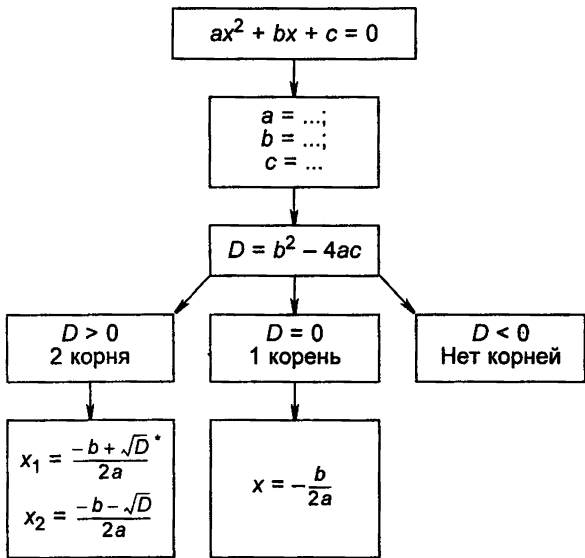


Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

1. Решение неполного квадратного уравнения

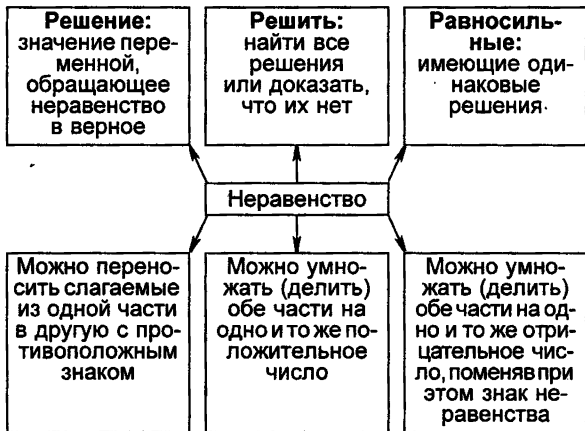


2. Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле



* Запись корней x_1 и x_2 в случае, когда $D > 0$, объединяют и записывают так: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Неравенства



Название неравенства	Общий вид
Линейное	1) $ax > b$, 2) $ax \geq b$, 3) $ax < b$, 4) $ax \leq b$
Квадратичное	1) $ax^2 + bx + c > 0$, 2) $ax^2 + bx + c \geq 0$, 3) $ax^2 + bx + c < 0$, 4) $ax^2 + bx + c \leq 0$

Свойства числовых неравенств

№	Условие	Заключение
1	$a > b$	$b < a$
2	$a > b$ и $b > c$	$a > c$
3	$a > b$, c — любое число	$a + c > b + c$
4	$a > b$ и $c > 0$	$ac > bc$
5	$a > b$ и $c < 0$	$ac < bc$
6	$a > b$ и $c > d$	$a + c > b + d$
7	$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0,$ $a > b$ и $c > d$	$ac > bd$
8	$a > b > 0, n$ — натуральное число	$a^n > b^n$
9	$a > 0, b > 0, a > b$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Числовые промежутки

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leq b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leq x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

Решение линейного неравенства

Вид неравенства	a	Решение	Ответ
$ax + b > 0$	$a > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$(-\frac{b}{a}; \infty)$
$ax + b > 0$	$a < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a})$
$ax + b \geq 0$	$a > 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$[-\frac{b}{a}; \infty)$
$ax + b \geq 0$	$a < 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a}]$
$ax + b < 0$	$a > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a})$
$ax + b < 0$	$a < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$(-\frac{b}{a}; \infty)$
$ax + b \leq 0$	$a > 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a}]$
$ax + b \leq 0$	$a < 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$[-\frac{b}{a}; \infty)$

Решение неравенств методом интервалов

$$\begin{matrix} f(x) > 0; f(x) \geq 0 \\ f(x) < 0; f(x) \leq 0 \end{matrix}$$

Пример

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$$

Находим нули функции, т. е. точки, в которых $f(x) = 0$; $x = a$; $x = b$

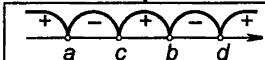
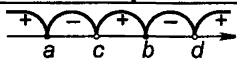
Находим точки, в которых функция $f(x)$ не определена; $x \neq c$; $x \neq d$

Находим промежутки знакопостоянства, например



$$f(x) \geq 0; f(x) \leq 0$$

$$f(x) > 0; f(x) < 0$$



$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

Ответ:

$$(-\infty; a] \cup (c; b] \cup (d; \infty)$$

Ответ:

$$[a; c) \cup [b; d)$$

Ответ:

$$(-\infty; a) \cup (c; b) \cup (d; \infty)$$

Ответ:

$$(a; c) \cup (b; d)$$

**Решение системы линейных неравенств
с одной переменной вида**

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}, \text{ где } -\frac{b}{a} > -\frac{d}{c} \quad (a > 0; c > 0)$$

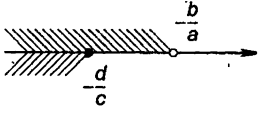
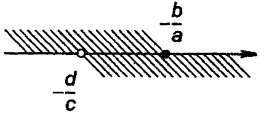
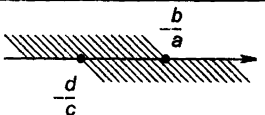
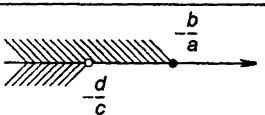
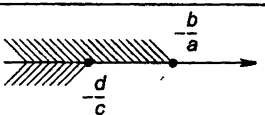
Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$

См. продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		Нет решений
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right)$
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$

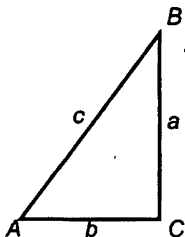
См. продолжение

Продолжение

Система неравенств	Изображение на координатной прямой	Решение
$\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$		$\left(-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d \geq 0 \end{cases}$		$\left[-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right]$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$
$\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ cx + d \leq 0 \end{cases}$		$\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right]$

Характеристики	Последовательность	
	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии) $a_{n+1} = a_n + d$	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии) $b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n -го члена	$a_n = a_1 + d(n - 1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n -й)	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность или знаменатель)	$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	—	$S = \frac{b_1}{1 - q}, q < 1$

Тригонометрические функции острого угла



Функция	Угол	
	A	B
sin (синус)	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
cos (косинус)	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
tg (тангенс)	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
ctg (котангенс)	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$
sec (секанс)	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{a}$
cossec (косеканс)	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$

Сравнительная таблица градусной и радианной мер некоторых углов

Углы в градусах	Углы в радианах	Углы в градусах	Углы в радианах
0°	0	180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$
		360°	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Аргумент Функция α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
\sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1
cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-

См. продолжение

Аргумент α Функция	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
\sec	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
cosec	-	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	-

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Формулы сложения и вычитания

Функция	Аргумент	
	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
sin	$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
cos	$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
tg	$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
ctg	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$
sec	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$
cosec	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$	$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$

**Формулы половинных, двойных
и тройных углов (также $\sin 4\alpha$; $\cos 4\alpha$)**

	$\frac{\alpha}{2}$	2α	3α	4α
sin	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$2 \sin \alpha \times \cos \alpha$	$3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha \times \sin \alpha - 4 \cos \alpha \times \sin^3 \alpha$
cos	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \times \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$
tg	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$	-
ctg	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$	-

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$\sin \alpha + \sin \beta$	$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta$	$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta$	$-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\cos \alpha - \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$
$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$	$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$
$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$	$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$

См. продолжение

$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta$	$-\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$
$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$	$2 \operatorname{cosec} 2\alpha$
$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$	$-2 \operatorname{ctg} 2\alpha$

Обратные тригонометрические функции

Функция	Обратная функция	α	$\sin \alpha$
\sin	$\arcsin a = \alpha$	$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin \alpha = a$
\cos	$\arccos a = \alpha$	$\alpha \in [0; \pi]$	$\cos \alpha = a$
tg	$\operatorname{arctg} a = \alpha$	$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{tg} \alpha = a$
ctg	$\operatorname{arcctg} a = \alpha$	$\alpha \in (0; \pi)$	$\operatorname{ctg} \alpha = a$

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$ a > 1$	Нет решений	—
	$ a \leq 1$	$x = (-1)^k x$ $x = \arcsin a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\sin x = 0;$ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
			$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
			$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$ a > 1$	Нет решений	—
	$ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 0;$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
			$\cos x = 1;$ $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
			$\cos x = -1;$ $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	—
$\operatorname{ctg} x = a$	a — любое число	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	—

Решение простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$; $\cos x = a$

a	sin x = a	cos x = a
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi n$
$\frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$
$-\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$k, n \in \mathbb{Z}$

Решение простейших тригонометрических уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$

a	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
-1	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
$\sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$
$-\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$

$k, n \in \mathbb{Z}$

Связь показательной и логарифмической функций

Функция	x	y
$y = a^x$	Показатель степени	Степень
$y = \log_a x$ ($x = a^y$)	Степень	Показатель степени

Правила логарифмирования и потенцирования

№	Правила логарифмирования	Правила потенцирования
1	$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$	$\log_a N_1 + \log_a N_2 = \log_a(N_1 \cdot N_2)$
2	$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$	$\log_a N_1 - \log_a N_2 = \log_a \frac{N_1}{N_2}$
3	$\log_a N^k = k \cdot \log_a N$	$k \cdot \log_a N = \log_a N^k$
4	$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N$	$\frac{1}{k} \cdot \log_a N = \log_a \sqrt[k]{N}$

Производная $f'(x)$

Определение.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Геометрический смысл.

$y = kx + b$ — касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 . $f'(x_0) = k$

Физический смысл.

1) $S'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$. S — расстояние, v — скорость, a — ускорение, t — время. 2) Мощность есть производная работы по времени

Правила вычисления производных.

$$1) (u + v)' = u' + v'. \quad 2) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \text{ где } v \neq 0$$

Производная сложной функции.

$$h(x) = g(f(x)) \quad h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Возрастание и убывание функции.

Если $f'(x) > 0$ на J , то $f(x)$ возрастает на J .

Если $f'(x) < 0$ на J , то $f(x)$ убывает на J .

Точки максимума и минимума.

Если x_0 — точки экстремума, то $f'(x_0) = 0$

1) Если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка максимума. 2) Если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка минимума

Таблица производных

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	C — постоянная	0
2	$kx + b$	k
3	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
4	x^r	$r x^{r-1}$
5	a^x	$a^x \cdot \ln a$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

См. продолжение

Продолжение

№	$f(x)$	$f'(x)$
8	$\sin x$	$\cos x$
9	$\cos x$	$-\sin x$
10	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Определение. $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке J , если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in J$

Основное свойство.
Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке J , то общий вид всех первообразных для $f(x)$:
 $F(x) + C$, где C — const

Графики функций $F(x) + C$ получаются из графика $y = F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy

Первообразная

1. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$.
2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $k \cdot f(x)$.
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k и b — постоянные, где $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для $f(kx + b)$

Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

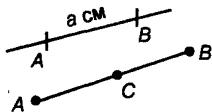
$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

ГЕОМЕТРИЯ

Отрезок

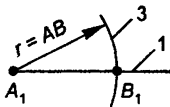


$$AB = a \text{ см}$$
$$AC + CB = AB$$

Дано: отрезок AB

Построить: A_1B_1 , $A_1B_1 = AB$

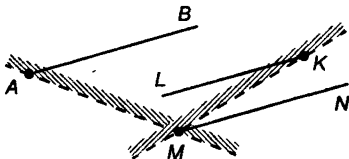
Построение



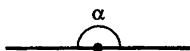
Луч

Сонаправленные лучи — AB и MN

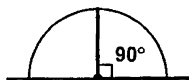
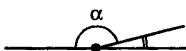
Противоположно направленные лучи — MN и KL



Угол



Развернутый



Прямой



Острый



Тупой



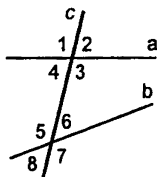
Смежные



Вертикальные



$\angle \alpha = \angle \beta$



С — секущая

Внутренние накрест лежащие углы — 3 и 5, 4 и 6

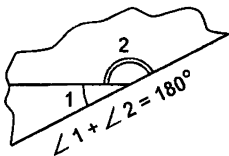
Односторонние (прилежащие) углы — 4 и 5, 3 и 6

Соответственные углы — 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7

Внешние накрест лежащие углы — 1 и 7, 2 и 8

Свойства смежных и вертикальных углов

Теорема о смежных углах



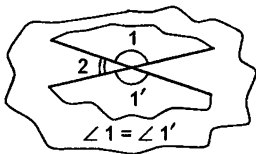
Доказательство:

Так как $\angle 1 + \angle 2$ — развернутый угол, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Теорема о вертикальных углах

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \\ \angle 1' + \angle 2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 1 = \angle 1'$$

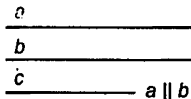


Параллельные прямые

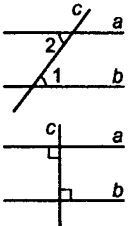
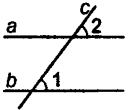
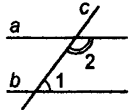
Определение

a и b не пересекаются

$a \parallel b, b \parallel c \rightarrow a \parallel c$



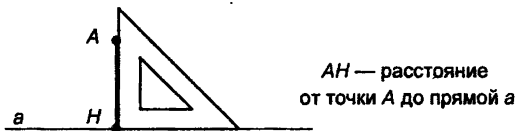
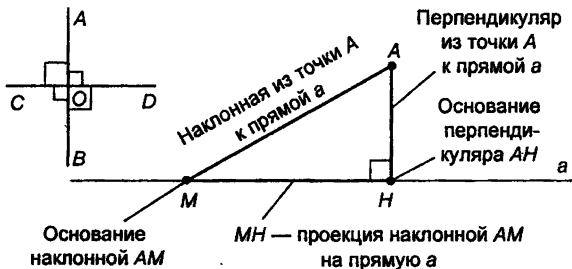
Признаки параллельности прямых (прямые и обратные теоремы)

№ п/п	Признак (прямая теорема)	Рисунок	Свойство (обратная теорема)
1	<p>Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$</p> <p>Следствие: Если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$</p>		<p>Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$</p> <p>Следствие: Если $a \parallel b$ и $c \perp a$, то $c \perp b$</p>
2	<p>Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$</p>		<p>Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$</p>
3	<p>Если $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $a \parallel b$</p>		<p>Если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$</p>

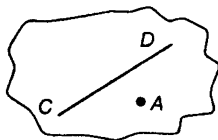
Перпендикулярные прямые

Определения

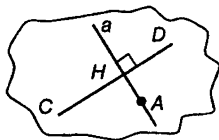
$AB \perp CD: \angle AOD = \angle AOC = \angle COB = \angle DOB = 90^\circ$



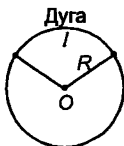
Свойство



Существует единственная прямая a



Окружность, круг



Окружность

$$C = 2\pi R = \pi d,$$

где $\pi \approx 3,14$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

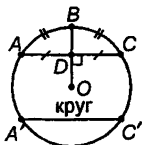
Круговой сектор



α — радианная
мера дуги

a — градусная
мера дуги

$$l = \frac{\pi R a}{180^\circ} = R\alpha$$

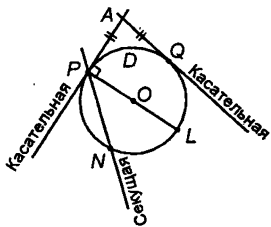


$$AC = A'C'$$

$$\cup AC = \cup A'C'$$

$$AD = DC$$

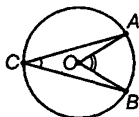
$$\cup AB = \cup BC$$



$$AP = AQ$$

$\angle PAQ$ — описанный

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} (\cup PLQ - \cup PDQ)$$



$\angle AOB$ — центральный

$\angle ACB$ — вписанный

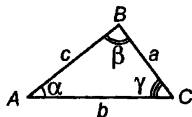
$$\angle AOB = \alpha^\circ; \cup AB = \alpha^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$1^\circ = \frac{1}{360}$ часть всей
окружности

Треугольник

Общие сведения

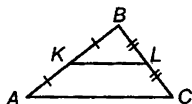


Три стороны, три угла —
элементы треугольника

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

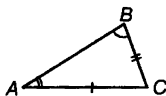


$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$$

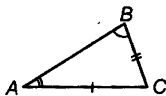


$$KL \parallel AC, KL = \frac{1}{2} AC$$

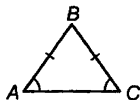
Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольников



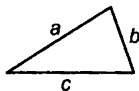
Если $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$



Если $\angle B > \angle A$, то $AC > BC$



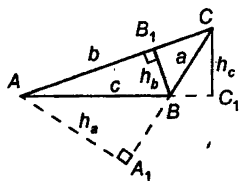
Если $\angle A = \angle C$,
то $BC = BA$



$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< b + a \end{aligned}$$

Высота, медиана, биссектриса

Высота h :



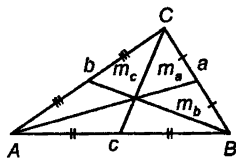
$$h_a = \frac{2S_{\text{треуг}}}{a}, \text{ где } S_{\text{треуг}} —$$

площадь ΔABC

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} =$$

$$= bc : ac : ab$$

Медиана m :



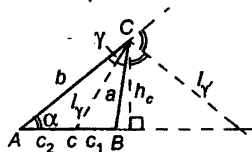
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Биссектриса l :



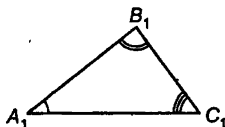
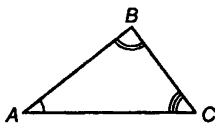
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a}$$

$$l_\alpha = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}$$

$$l_\gamma = \frac{2}{|b-c|} \times \sqrt{bc(p-c)(p-b)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$, $\angle(h_c; l_\gamma) = \frac{\beta - \alpha}{2}$, $\angle(h_c; l_\beta) = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}$

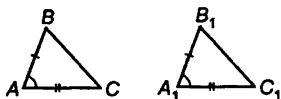
Равенство треугольников



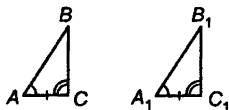
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Первый признак
равенства треугольников

Второй признак
равенства треугольников

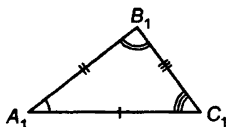
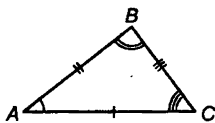


$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$



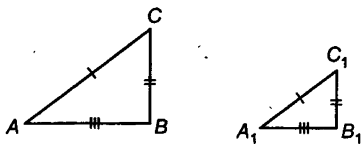
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Третий признак равенства треугольников



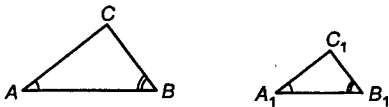
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Подобие треугольников



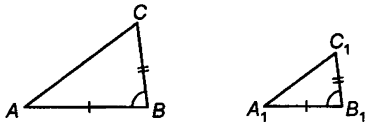
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$$

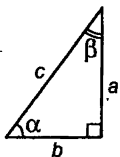
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \angle B = \angle B_1$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Основные тригонометрические соотношения



Синус:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

Косинус:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

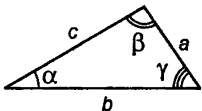
$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности

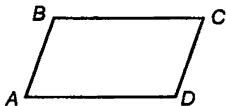
Теорема тангенсов

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

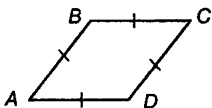
Параллелограмм



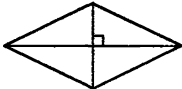
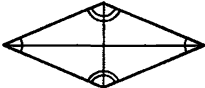
$$AB \parallel CD, BC \parallel AD.$$

Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
<p>1. В параллелограмме противоположные углы равны</p> 	<p>1. Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм</p>  <p>Если $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм</p>
<p>2. В параллелограмме противоположные стороны равны</p> 	<p>2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм</p>
<p>3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам</p> 	<p>3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм</p>

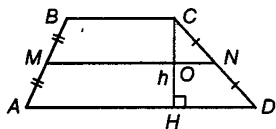
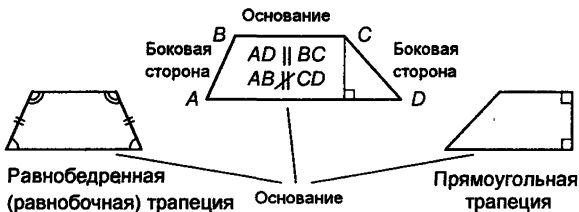
Ромб



$ABCD$ — ромб
 $AB \parallel CD, BC \parallel AD$
 $AB = CD = BC = AD$

Свойства ромба	Признаки ромба
<p>1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом</p> 	<p>1. Если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то этот параллелограмм — ромб</p>
<p>2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов</p> 	<p>2. Если диагонали параллелограмма являются биссектрисами его углов, то этот параллелограмм — ромб</p>
<p>Все свойства параллелограмма верны для ромба</p>	

Трапеция



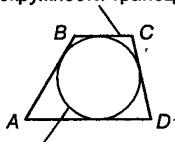
Средняя линия трапеции

$$MN \parallel BC; MN \parallel AD$$

$$MN = \frac{BC + AD}{2}, \quad CO = OH$$

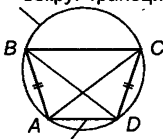
$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = MN \cdot h$$

Описанная около
окружности трапеция



Вписанная окружность

Окружность, описанная
вокруг трапеции



Вписанная
равнобедренная трапеция

$$AC \cdot BD = AC \cdot CD + AD \cdot CB$$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ; \angle B + \angle D = 180^\circ$$

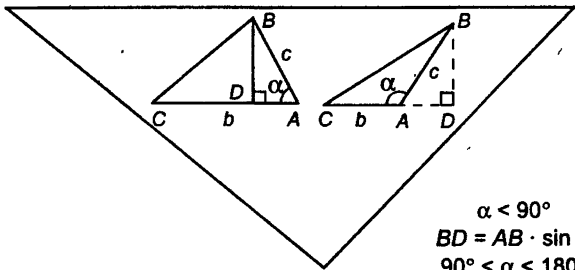
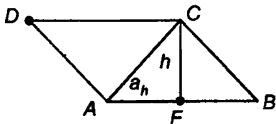
Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_h \cdot h$$



$$\alpha < 90^\circ$$

$$BD = AB \cdot \sin$$

$$90^\circ < \alpha < 180$$

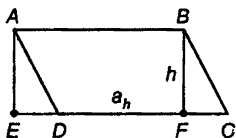
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b, c$$

$$BD = AB \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = AB \cdot \sin \alpha$$

$$h = c \cdot \sin \angle b, c$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} b_h \cdot h \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin \angle b, c$$

Площадь параллелограмма



$$S = a_h \cdot h$$

Если $ABCD$ — прямоугольник, то $S_{ABCD} = a_h \cdot h$

Если $ABCD$ — не прямоугольник, то пусть $\angle DAB < 90^\circ$

$$S_{ABCE} = S_{\Delta AED} + S_{ABCD}$$

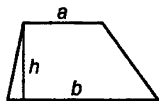
$$S_{ABCE} = S_{ABFE} + S_{\Delta BFC}$$

$$S_{\Delta AED} = S_{\Delta BFC}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABFE}$$

$$S_{ABCD} = a_h \cdot h$$

Площадь трапеции



Теорема: $S_{\text{трап}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Доказательство:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}, \text{ поскольку}$$

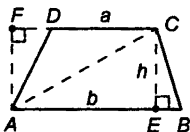
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE$$

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AF,$$

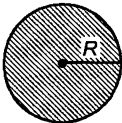
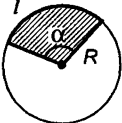
$$\text{то } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB \cdot CE + DC \cdot AF) =$$

$$= \frac{1}{2} h(AB + DC)$$

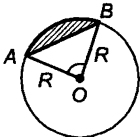
$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} h$$



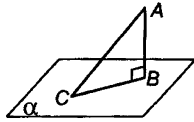
Площади круга, сектора, сегмента

Формула, рисунок	Примеры
 <p style="text-align: center;"> $S_{\text{кр}} = \pi R^2$ $S_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4}$ </p>	<p> $R = 2 \text{ см}$ $S \approx 3,14 \cdot 2^2 = 12,56 \text{ (см}^2\text{)}$ $d = 4 \text{ см}$ $S \approx 3,14 \cdot \frac{4^2}{4} = 12,56 \text{ (см}^2\text{)}$ </p>
 <p style="text-align: center;"> $S_{\text{сект}} = \frac{Rl}{2} =$ $= R^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ </p>	<p> $R = 2 \text{ см}; l = 3 \text{ см};$ $S = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ (см}^2\text{)}$ $R = 4 \text{ см}; \alpha = 2 \text{ рад};$ $S = \frac{4^2 \cdot 2}{2} = 16 \text{ (см}^2\text{)}$ $R = 3 \text{ см}; \alpha = 120^\circ;$ $S = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = 9,42 \text{ (см}^2\text{)}$ </p>

См. продолжение

Формула, рисунок	Примеры
 <p> $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\Delta AOB}$ $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$ </p>	<p> $R = 2 \text{ см}; \angle AOB = 60^\circ$ $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3} \text{ (см}^2\text{)}$ $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$ $S_{\text{сегм}} = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ см}^2$ </p> <p> $R = 2 \text{ см}; \angle AOB = \frac{\pi}{3}$ $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) =$ $= 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ см}^2$ </p>

Наклонная в пространстве

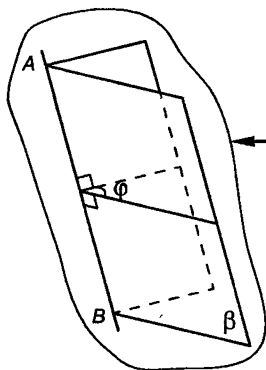
	<p> $AB \perp \alpha$; AC — наклонная; C — основание наклонной; CB — проекция наклонной </p>	<p>$AC > AB$</p>
--	---	--------------------------------

См. продолжение

	<p>$AB \perp \alpha$; AC — наклонная; C — основание наклонной; BC — проекция; $a \subset \alpha$</p>	<p>Теорема о трех перпендикулярах: «Если $a \perp BC$, следовательно, $a \perp AC$. Если $a \perp AC$, следовательно, $a \perp BC$»</p>
	<p>$AB \perp \alpha$; AC_1, AC_2 — наклонные; BC_1, BC_2 — проекции наклонных.</p>	<p>Если $AC_1 = AC_2$, то $BC_1 = BC_2$. Если $BC_1 = BC_2$, то $AC_1 = AC_2$</p>
	<p>$AB \perp \alpha$; AC_1, AC_2 — наклонные; BC_1, BC_2 — проекции наклонных</p>	<p>Если $AC_1 > AC_2$, то $BC_1 > BC_2$. Если $BC_1 > BC_2$, то $AC_1 > AC_2$</p>

Двугранный угол

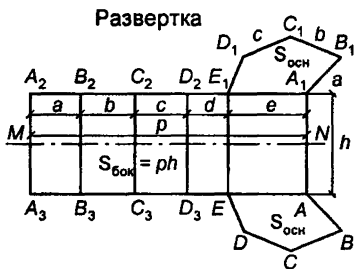
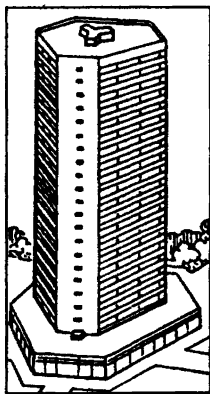
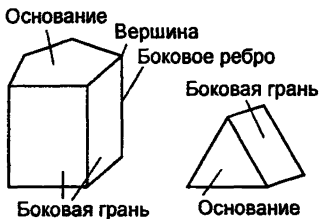
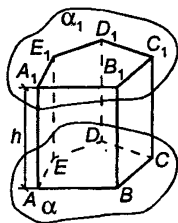
Двугранный угол с ребром AB и гранями α и β ; плоскость φ пересекает ребро AB под прямым углом, а плоскости α и β вырезают на ней линейный угол φ данного двугранного угла



$$\angle(\alpha, \beta) = \angle \varphi$$
$$0^\circ < \angle \varphi < 180^\circ$$

Фигура, образованная полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, с общей ограничивающей прямой

Прямая призма

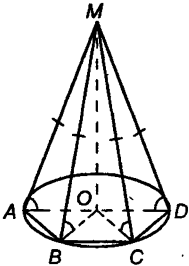
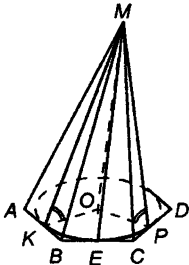


Площадь поверхности

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$\text{Объем } V_{\text{пр}} = Sh$$

Пирамиды

Изображение	Основные соотношения
	<p>Если $MA = MB =$ $= MC = \dots$, то $MO \perp ABC$. Если $\angle MAO = \angle MBO =$ $= \angle MDO = \angle MCO = \dots$, то O — центр описанной окружности</p>
	<p>Если $\angle MKO = \angle MEO =$ $= \angle MPO = \dots$, то O — центр вписанной окружности</p>

Усеченная пирамида

Построение

→ $OABCD$ — пирамида $(ABCD) \parallel (A_1B_1C_1D_1)$:

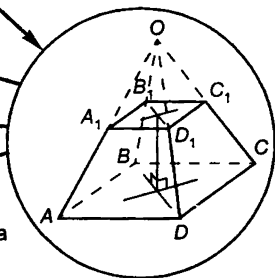
→ $OA_1B_1C_1D_1$ — пирамида

$ABCD A_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида

$$H_o^k(ABCD) = A_1B_1C_1D_1$$

Боковые грани —
трапеции

Если $OABCD$ — правильная пирамида, то $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная пирамида



$$S_{\text{полн пов}}; S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_{\text{бок}}$$

$$S_{\text{бок пов}} = \frac{1}{2}(P + p)h, \text{ где } P, p \text{ — периметры оснований}$$

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$S_1 = S_{ABCD}, S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$$

В правильной усеченной пирамиде грани — равные равнобедренные трапеции

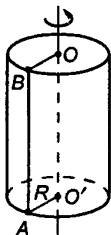
Высота трапеции боковой грани — апофема правильной усеченной пирамиды (h)

Цилиндр

Цилиндр, получаемый вращением прямоугольника $OO'AB$ вокруг прямой, содержащей сторону OO' , перпендикулярные стороны $O'A$ и OB описывают основания цилиндра, а отрезок AB ,

параллельный OO' , — боковую поверхность его. R — радиус основания цилиндра, h — его высота, равная образующей

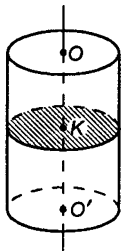
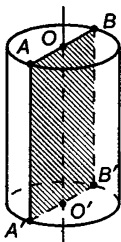
Прямоугольник $AA'B'B$ — осевое сечение цилиндра с осью OO'



$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

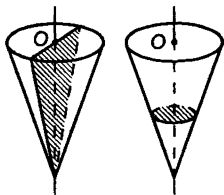
$$V = \pi R^2 h$$



Круг K — поперечное сечение цилиндра с осью OO'

Конус

Конус, получаемый вращением прямоугольного треугольника AOB вокруг прямой, содержащей катет AO , другой катет OB описывает основание конуса, а гипотенуза AB — его боковую поверхность, R — радиус основания конуса, h — высота его, l — образующая



Осевое сечение конуса с осью O — равнобедренный треугольник

$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

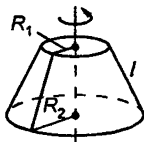
Усеченный конус,
общий вид



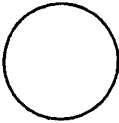
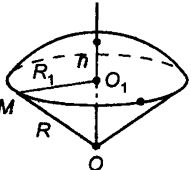
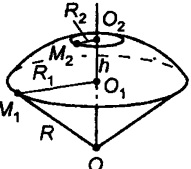
Усеченный конус, R_1 и R_2 — радиусы оснований, h — высота, l — отрезок образующей, O — ось

$$S_{\text{бок}} = \pi l (R_1 + R_2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

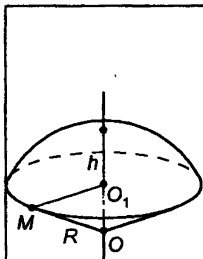


Объемы и площади поверхностей шара и его частей

	$S_{\text{пов шара}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{шара}} = \frac{4\pi R^3}{3}$
	$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(R_1^2 + h^2)$ $S = \pi(2Rh + R_1^2) = \pi(h^2 + 2R_1^2)$ $R_1 = \sqrt{h(2R - h)}$ $V_{\text{сегм}} = \pi \left(R - \frac{h}{3} \right) h^2 =$ $= \frac{1}{6} \pi h(3R^2 + h^2) = \frac{1}{6} \pi h^2(3D + 2h)$
	<p>h_1 и h_2 — высоты удаленных сегментов так, что</p> $2R - h_1 - h_2 = h$

См. продолжение

Продолжение



$$V_{\text{слюя}} = \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi R(h_1^2 +$$

$$+ h_2^2) - \frac{\pi}{3} (h_1^3 + h_2^3)$$

$$V_{\text{слюя}} = \frac{1}{6} \pi h (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$$

$$S_{\text{пояс}} = 2\pi R h = \pi D h$$

$$V_{\text{сект}} = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{6} D^2 h$$

$$S_{\text{пов. сект}} = \pi R (2h + O_1 M)$$

Содержание

Алгебра	1
Геометрия	37

В помощь учебному процессу

Справочные материалы

МАТЕМАТИКА В КАРМАНЕ

Ответственный редактор *О. В. Стукалова*

Макет *И. А. Изергин*

Корректор *Л. К. Корнилова*

ISBN 5-17-009325-X (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-8195-0176-1 (ООО «АСТОЛ»)

Подписано в печать 09.12.2003. Формат 84x108^{1/8}. Гарнитура
Гельветика Деят. Усл. печ. л. 1,68. Тираж 15000 экз. Заказ № 20.
Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2,
953005 – литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№77 99.02 953 Д 908286 12.02 от 27 12 02

ООО «АСТОЛ»

129085, Москва, пр. Ольминского, д. 3а, стр. 3

ООО «Издательство АСТ»

667000, Республика Тыва, г. Кызыл

ул. Кочетова, д. 28

www.ast.ru

E-mail: astpub@aha.ru

Denis

e-mail: demik@bk.ru

